



Proyecto MATEM: Cálculo I
II Examen Parcial - Solucionario

Total de puntos: 73

I Parte: Respuesta breve

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica mostrada en la figura 1, correspondiente a la función f . Escriba en su cuaderno de examen el número de ítem junto con la respectiva respuesta que completa correctamente cada oración. (6 puntos, 1 punto cada respuesta correcta)

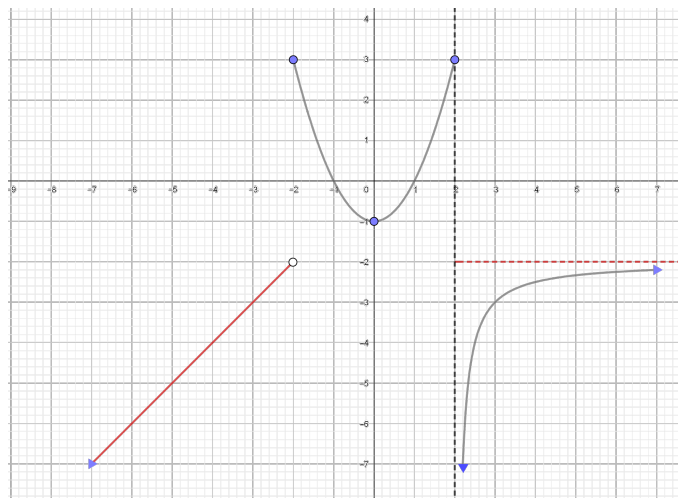


Figura 1: Gráfica de f

1. La ecuación de la asíntota horizontal corresponde a: $y = -2$
2. Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a: $] -2, 0[$
3. Un intervalo donde $f'(x) > 0$ corresponde a: $] -\infty, -2[$ ó $] 0, 2[$ ó $] 2, +\infty[$
4. El conjunto solución de $f''(x) < 0$ corresponde a: $] 2, +\infty[$
5. El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a: 0
6. Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle $[-2, 2]$

II Parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen cada una de sus respuestas. **(67 puntos)**

1. Considere la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

Compruebe que la función $f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$ satisface la ecuación. **(7 puntos)**

$$f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$$

$$f'(x) = 3e^{-2x} + e^{-2x}(-2)(3x - 5) = e^{-2x} [3 - 6x + 10] = e^{-2x} [13 - 6x]$$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(13 - 6x) - 6e^{-2x} = e^{-2x} [-26 + 12x - 6] = e^{-2x} [-32 + 12x]$$

Sustituyendo $f'(x)$ y $f''(x)$ en la ecuación $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$:

$$e^{-2x} [-32 + 12x] + 4e^{-2x} [13 - 6x] + 4f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$$

$$e^{-2x} [-32 + \cancel{12x} + 52 - \cancel{24x} + \cancel{12x} - 20]$$

$$e^{-2x} \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

2. Determine la ecuación de la recta perpendicular a la curva $x^3 + y^3 - 6xy = 10$ en el punto $(3, 1)$. **(6 puntos)**

$$3x^2 + 3y^2y' - 6y + y'(-6x) = 0$$

$$y'(3y^2 - 6x) = -3x^2 + 6y$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 6y}{3y^2 - 6x}$$

$$y'(3, 1) = \frac{-3(3)^2 + 6(1)}{3(1)^2 - 6(3)} = \frac{-27 + 6}{3 - 18} = \frac{-21}{-15} = \frac{7}{5}$$

$$m_{\perp} = -\frac{5}{7}$$

Con $y = m_{\perp}x + b$ y $(3, 1)$:

$$b = 1 + \frac{15}{7} = \frac{22}{7}$$

$$y_{\perp} = -\frac{5}{7}x + \frac{22}{7}$$

3. Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que **(4 puntos)**

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + kx^2 - 2$$

Determine el valor de k para que la función f tenga un punto de inflexión en $x = -1$.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 2kx$$

$$f''(x) = -6x + 4 + 2k = 0$$

$$\Rightarrow k = 3x - 2 \Rightarrow k = 3(-1) - 2 \Rightarrow k = -5$$

4. Determine y' . No es necesario simplificar.

(6 puntos)

$$f(x) = \frac{\arcsen(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$y = \frac{\arcsen(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$\ln y = \ln \left[\frac{\arcsen(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \right]$$

$$\ln y = \ln [\arcsen(2x + 1)] - \ln [\sqrt[3]{x^2 - 1}]$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{\arcsen(2x + 1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \cdot 2x$$

$$y' = \left[\frac{\arcsen(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\arcsen(2x + 1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \cdot 2x \right]$$

O bien,

$$y' = \frac{2\sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} - \frac{2x \arcsen(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

5. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right]$ (5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} \quad \text{F.I.: } \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x} \quad \text{F.I.: } \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital nuevamente:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)^{\cos(x)}$ (5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)^{\cos(x)} \quad \text{F.I.: } \infty^0$$

Sea $y = \tan(x)^{\cos(x)}$

$$\ln y = \cos x \ln [\tan(x)] = \frac{\ln [\tan(x)]}{\sec(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln [\tan(x)]}{\sec(x)} \quad \text{F.I.: } \frac{\infty}{\infty}$$

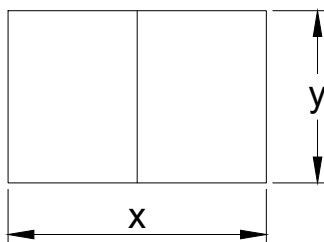
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan(x)} \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec(x)}{\tan^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y = e^0 = 1$$

6. Resuelva los siguientes problemas:

- (a) Un granjero tiene 100 metros de alambre para cerca, con el cual planea construir dos corrales rectangulares adyacentes, ¿cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima? (5 puntos)



$$3y + 2x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{3}$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x \left(\frac{100 - 2x}{3} \right) \quad x \in [0, 50]$$

$$A(x) = \frac{100x - 2x^2}{3}$$

$$A'(x) = \frac{100}{3} - \frac{4x}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$A(0) = 0$$

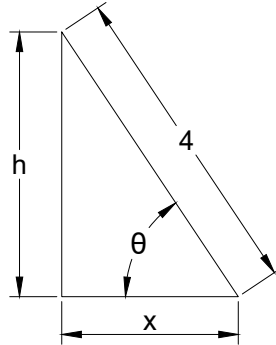
$$A(25) = \frac{2500 - 250}{3} = \frac{1250}{3} = 416,667$$

$$A(50) = 0$$

$$\text{Con } x = 25 \Rightarrow y = \frac{100 - 2 \cdot 25}{3} = 16,667$$

Por lo tanto, las dimensiones que encierran el área máxima son $25u.l.$ x $16,667u.l.$

- (b) Una escalera de 4 metros se apoya contra un muro y su base se comienza a resbalar. Cuando la base está a 3,7 metros del muro, la base se aleja a razón de 1,5 m/s.



Determine la razón de cambio: a. $\frac{dh}{dt}$, b. $\frac{dA}{dt}$ y c. $\frac{d\theta}{dt}$. (7 puntos)

Planteamiento del problema:

Cuando $x = 3,7\text{m} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 1,5 \text{ m/s}$

- a. la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante.

$$h^2 + x^2 = 16$$

$$2h \frac{dh}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$2(1,52) \frac{dh}{dt} + 2(3,7)(1,5) = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-2(3,7)(1,5)}{1,52}$$

$$\frac{dh}{dt} = -3,65 \text{ m/s}$$

- b. el área del triángulo formado por la escalera, el muro y el suelo en ese instante.

$$A = \frac{xh}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left[h + \frac{dh}{dt}x \right]$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} [1,52 + 3,7(-3,65)]$$

$$\frac{dA}{dt} = -5,613 \text{ m}^2/\text{s}$$

c. el ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante.

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{4} \\ -\operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{4} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{4} \frac{dx}{dt} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{4} \cdot 1,5 \frac{1}{0,38} \\ \frac{d\theta}{dt} &= -0,9896 \operatorname{rad}/s\end{aligned}$$

7. Trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{x^2 - 4}$, definida en su dominio máximo, si se sabe que:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} \quad f''(x) = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

- (a) Determine el dominio máximo de la función f y los puntos de intersección con los ejes coordenados. **(3 puntos)**

$$D_f: \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\cap_y: (0, \frac{1}{4})$$

$$\cap_x: (-1, 0), (1, 0)$$

- (b) Determine la(s) asíntota(s) de la gráfica de la función f y escriba su(s) ecuación(es). **(5 puntos)**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$\therefore x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

$\therefore y = 1$ es una asíntota horizontal.

- (c) Determine los intervalos de monotonía y los puntos extremos (donde crece, donde decrece, puntos máximos y mínimos relativos) de la función f . **(3 puntos)**

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\therefore x = 0$ es un máximo relativo

$$f'(x) > 0 \text{ (creciente) en: }]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$$

$$f'(x) < 0 \text{ (decreciente) en: }]0, 2[\cup]2, +\infty[$$

- (d) Analice la concavidad de la función f y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión, indíquelos. **(3 puntos)**

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{no hay puntos de inflexión.}$$

$$f''(x) > 0 \text{ (cóncava hacia arriba) en: }]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$f''(x) < 0 \text{ (cóncava hacia abajo) en: }]-2, 2[$$

- (e) Construya el cuadro de variación de la función f . **(3 puntos)**

	$-\infty$	-2	0	$+2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	
$f''(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$	$\nearrow \cup$	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	

- (f) Con la información obtenida anteriormente, construya la gráfica de la función f en su máximo dominio. (3 puntos)

